ШИФР № м103

№ 1.

$x^2 + ax + a = 0$

1) Найдём значения a, при которых ур-е имеет решение ($D \geq 0$):

$x^2 + ax + a = 0$

$D = a^2 - 4a = a(a-4) \Rightarrow a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

2) Преобразуем ур-е:

$x^2 + ax + a = 0$

$x^2 + a(x+1) = 0$

$x^2 = -a(x+1)$

Отсюда можно увидеть, что ур-е будет иметь целый корень при $a=0$ ($x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$)

Так же ур-е будет иметь целый корень, если его левую часть ($x^2 + ax + a$) можно будет представить в виде квадрата суммы или разности ($a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$) (в данном случае только квадратом суммы, т.к. коэффициенты при a имеют одинаковый знак). Такое возможно только при $a = 4$ ($x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$). Следовательно получаем, что ур-е имеет целый корень при $a = 0$ и $a = 4$.

Ответ: 0; 4.

№ 2.

$\overline{abcdef} \vdots 19$

$\overline{abcde} \vdots 17$

$\overline{abcd} \vdots 13$

1) Возьмём самое большое четырёхзначное число, которое делится на 13 — 9997.

2) Разделим столбиком данное число на 17, чтобы найти последнюю цифру пятизначного числа:

```
 9997? | 17
-85    |----
       | 5881
 149
-136
  137
 -136
    1?
```

$\Rightarrow ? = 7 \Rightarrow 99977 \vdots 17$

3) Разделим теперь на 19, чтобы найти последнюю цифру шестизначного числа:

```
 99977? | 19
-95     |----
        | 5261
  49
 -38
  117
 -114
    37
   -19
    18?
```

$\Rightarrow$? найти невозможно $\Rightarrow$ этот вариант неверен

4) Возьмём второе максимальное 4-значное число, которое $\vdots 13$ — это $9997 - 13 = 9984$.

5) Повторим действие 2, но уже с 9984:

```
 9984? | 17
-85    |----
       | 5873
 148
-136
  124
 -119
    5?
```

$\Rightarrow ? = 1 \Rightarrow 99841 \vdots 17$

(прод. на след. листе)

ШИФР № м103

№ 2 (прод.)

6) И повторим действие 3 с числом

```
 99841? | 19
-95     |52548
  48
 -38
  104
  -95
    91
   -76
    15?
```

$15? \Rightarrow ? = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 998412 \vdots 19 \\ 99841 \vdots 17 \\ 9984 \vdots 13 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 998412$ – искомое наибольшее А.

Ответ: 998412.

№ 3.

1) $xyzt > 0$, это возможно только при:

1) если $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$ и $t > 0$

2) если 2 из них положительные, а 2 отриц.

3) если $x < 0$; $y < 0$; $z < 0$ и $t < 0$.

2) $x > y^3$; $y > z^3$; $z > t^3$; $t > x^3$, это возможно только при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ (это можно доказать преобразовав эту систему неравенств к виду $x > x^{243}$, т.е. подстановкой).

3) Пусть $x \in (-\infty; -1)$ – первый промежуток, а $x \in (0; 1)$ – второй промежуток.

4) Если $x \in$ первому промежутку, то тогда $y < 0$ и $z < 0$ и $t < 0$, это подходит под условие 3 из пункта 1.

(прод. на след. листе)

№ 3 (прод.)

5) Если $x \in$ второму промежутку, тогда y может быть $[-\infty; 0]$ или тоже принадлежать второму промежутку $(0; 1)$, НО: если $y \leq 0$, то мы придём к противоречию:

$y \leq 0 \Rightarrow z < 0 \Rightarrow t < 0$

$\underbrace{t}_{<0} > \underbrace{x^3}_{\in(0;1)}$ - что неверно, следовательно в этом случае $x \in (0; 1)$, и $y \in (0; 1)$, и $z \in (0; 1)$, и $t \in (0; 1)$, что подходит под 1 условие из пункта 1.

ч. т. д.

№ 4.

Сумма чисел чётная при условиях:

1) Все числа чётные - 1ый набор вариантов
2) Кол-во нечётных - чётное - 2ой набор вар.

В 1 набор входит кол-во вариантов с использованием только чётных чисел (2; 4; 6; 8; 10; 12).

Во 2 набор входит кол-во вариантов с использованием чётного кол-ва нечётных чисел, т. е. 1 набор умноженный на кол-во вариантов с использованием чётного кол-ва только нечётных чисел.

(прод. на след. листе)

ШИФР № М103

№ 4 (прод.)

1) Посчитаем варианты 1ого набора:

[введём обозначение C_m^n - кол-во сочетаний из m по n; $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$

Нам нужно посчитать сумму кол-ва сочетаний из 6 по 1; 2; 3; 4; 5; 6:

$6 + \frac{6\cdot 5}{2} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 3} + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + 1 = 63$ вариантов

2) Посчитаем варианты 2ого набора:

$63\cdot\left(\frac{7\cdot 6}{2} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right) = 63\cdot 63 =$

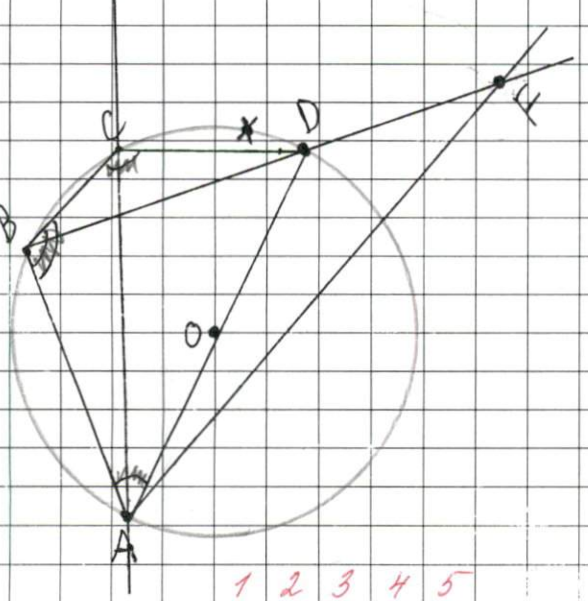
$= 3969$ вариантов

3) Сложим оба набора вариантов и получим ответ:

$63 + 3969 = 4032$ вариантов хороших наборов чисел

Ответ: 4032.

№ 5.



1) Т.к. ABCD вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

2) Т.к. окр. описана около $\triangle ADF \Rightarrow$ она пересекает точку A и прямая AC пересекает точку A $\Rightarrow$ окр. касается AC в точке A.

ч.т.д.

1	2	3	4	5	
7	7	3	3	0	20б

5/5